245 - Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

Cadre : $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application. $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$

I. Holomorphie - Fonctions analytiques

1) $\mathbb{C}$-dérivabilité

Déf. (1) : On dit que f est dérivable en $z_0 \in \Omega$ si $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une unique limite, notée $f'(z_0)$, quand $z \to z_0$.
On dit que f est holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point de Ω, et on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Ex. (2) : $z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$; $z \mapsto \bar{z}$ n'est nulle part dérivable

Prop. (3) : $\mathcal{H}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, et si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ne s'annule pas, $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$

2) Lien avec la différentiabilité

[Tau] Rq (4) : En posant $z = x+iy$, on identifiera $f(z)$ à $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}^2$

59 Prop. (5) : Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Sont équivalentes :

1) f est dérivable en z_0
2) f est différentiable en (x_0,y_0) et $\partial_x f(x_0,y_0) + i\,\partial_y f(x_0,y_0) = 0$
3) ________ $df(x_0,y_0)$ est une similitude vectorielle directe.

Si ces conditions sont vérifiées, alors $f'(z_0) = \partial_x f(x_0,y_0) = -i\,\partial_y f(x_0,y_0)$

Coro (6) : En notant $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$, alors

60 f est dérivable en $z_0 \iff \begin{cases} \partial_x u(x_0,y_0) = \partial_y v(x_0,y_0) \\ \partial_y u(x_0,y_0) = -\partial_x v(x_0,y_0) \end{cases}$ *équations de Cauchy-Riemann*

3) Fonctions analytiques

[Tau] Déf. (7) : On dit que f est analytique sur Ω si f est développable en

50 série entière (DSE) en tout point de Ω. On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Ex. (8) : 1) si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R>0$, alors la somme $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$
2) $z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^*)$

Prop. (9) : $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$

Lemme (10) : On suppose que $0 \in \Omega$ et que f est DSE en 0 de développement $\sum a_n z^n$.
Alors il existe V voisinage ouvert de 0 tel que :

♡ 1) si $a_0 = 0$: $z \in V$ et $f(z) = 0 \iff z = 0$
2) si $a_0 \neq 0$: $\forall z \in V$, $f(z) \neq 0$.

Th. (11) : (principe prolongement analytique) ♡
On suppose Ω connexe. Soit $E \subset \Omega$ une partie admettant un point d'accumulation dans Ω et $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Si $f_{|E} = g_{|E}$, alors $f = g$ sur Ω tout entier.

Coro (12) : (zéros isolés)
Si Ω est connexe et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω. 53

Appli. (13) : Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ♡

Coro (14) : Si Ω est connexe, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Alors $f = 0$ sur Ω ssi f est nulle dans un voisinage de z_0 ssi $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

II. Formule de Cauchy dans un convexe et conséquences

1) Intégrale le long d'un chemin. Primitive holomorphe [Tau]

Déf. (15) : Un chemin est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue. Il est dit fermé si $\gamma(0) = \gamma(1)$, simple si γ est injective. On note $\gamma^* = \gamma([a,b])$. 67

Rq (16) : On ne considérera que des chemins de classe $\mathcal{C}^1_{pm}$.

Déf (17) : On suppose $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Soit $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin. 69
Alors : $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \times \gamma'(t)\,dt$

Déf./Th. (18) : Soit γ un chemin fermé et $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. L'indice de z par rapport à γ est $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,d\xi$. ~71
Ind : $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à image dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée.

Ex. (19) : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r>0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. $\gamma^* = \mathcal{C}(z_0, r)$ 72
et $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - z_0| < r \\ 0 & \text{si } |z - z_0| > r \end{cases}$

Th. (20) : Si f admet une primitive holomorphe sur Ω, alors pour tout chemin fermé γ tel que $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ 72

Th. (21) : Ω convexe. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ telle que pour tout triangle $T \subset \bar{T} \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Alors f admet une primitive sur Ω. 74
DVP1

2) Formule de Cauchy - Premières applications

[Tau] 74 **Th. 22** : (Goursat) Soit $w \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$. Alors pour tout triangle $T \subset \bar{T} \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$

Th. 23 : (théorème de Cauchy dans un convexe)

76 Ω convexe. Soit $w \in \Omega$, et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$. Alors pour tout chemin fermé γ tel que $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Th. 24 : (formule de Cauchy dans un convexe)

77 Ω convexe. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z \in \Omega$ et γ chemin fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$ et $z \notin \gamma^*$. Alors : $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \times f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$.

DVP 1 **Coro 25** : Ω ouvert de $\mathbb{C}$. Alors, $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$. De plus, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tel que $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$, alors f est DSE sur $D(z_0, R)$ et : $\forall\, 0 < r < R$, $\forall z \in D(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi$

78 **Coro. 26** : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$

Th. 27 : (Morera)

Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et pour tout triangle $T \subset \bar{T} \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Coro. 28 : Soit $w \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{w\})$. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

84 **Th. 29** : (inégalités de Cauchy)

Soit $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$. On note $\sum a_n z^n$ le DSE de f sur $D(0,R)$.

Alors : $\forall\, 0 < r < R$, $|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z| = r} |f(z)|$.

3) Principe du maximum

[Tau] **Th. 30** : Soit $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tel que $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On note $\sum a_n z^n$ le DSE de f sur $D(z_0, R)$. Alors pour tout $0 < r < R$

85 1) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$ (propriété de la moyenne)

[Ru] 254 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\,d\theta$ (égalité de Parseval)

Appli. 31 : (théorème de Liouville) 254

Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et f est bornée, alors f est constante.

Coro 32 : (théorème de D'Alembert-Gauss) ♡

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Th. 33 : (principe du maximum)

Ω connexe. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ / $\bar{D}(z_0, R) \subset \Omega$. 254

Alors : $|f(z_0)| \leq \max_{z \in C(z_0, R)} |f(z)|$. (1)

De plus on a égalité dans (1) SSI f est constante.

Exo 34 : Ω connexe. Soit D disque ouvert tel que $\bar{D} \subset \Omega$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Mq si $|f|$ est constant sur ∂D, alors f s'annule dans D.

4) Applications [Tau]

Th 35 : (Weierstrass) 89

Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge uniformément (CVU) sur tout compact de Ω vers une fonction f. Alors :

1) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
2) $\forall j \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(j)})_n$ CVU sur tout compact vers $f^{(j)}$.

Appli. 36 : On pose $P_1 = \{s \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\, s > 1\}$. On définit pour $s \in P_1$, ♡
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Alors $\zeta \in \mathcal{H}(P_1)$ [Art]

Th. 37 : (holomorphie sous l'intégrale)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que : 94

1) $\forall z \in \Omega$, $x \longmapsto f(z, x)$ est mesurable
2) $\forall x \in X$, $z \longmapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω
3) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g_K : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que : $\forall (z, x) \in K \times X$, $|f(z,x)| \leq g_K(x)$.

Alors $F : z \in \Omega \longmapsto \int_X f(z,x)\,d\mu(x) \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x)\,d\mu(x)$

[BMP] 110 Préliminaire (38) : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\rho : I \to \mathbb{R}$ >0 mesurable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$. $L^2(I,\rho) = \{ f : I \to \mathbb{C} \,/\, \int_I |f|^2 \rho\, dx < +\infty \}$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho\, dx$ est un espace de Hilbert.

On note $(P_n)_n$ la famille orthogonale de $L^2(I,\rho)$ obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(x \mapsto x^n)_n$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire ($\deg P_n = n$).

140 **Th. (39)** : On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$.
DVP2 Alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex. (40) : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les (P_n) sont appelés polynômes de Hermite
111 et $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$; $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

III. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus

1) Fonctions méromorphes

[Tau] Déf. (41) : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note $D^*(a,r) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < |z-a| < r \}$
91 Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, on dit que f admet une singularité en a. Celle-ci est dite illusoire si f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Prop. (42) : Soit $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. S'il existe $r > 0$ tel que f soit bornée sur $\Omega \cap D^*(a,r)$, alors f admet une singularité illusoire en a.

Th. (43) : Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Alors f vérifie une seule des propriétés suivantes :

1) f a une singularité illusoire en a

2) $\exists !\, m \geq 1, a_{-1} \dots a_{-m} \in \mathbb{C}, a_{-m} \neq 0 \,/\, z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité illusoire en a.

On dit alors que f admet en a un pôle d'ordre m et que $z \mapsto \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ est la partie principale de f en a

3) $\forall r > 0 \,/\, D(a,r) \subset U$, $f(D^*(a,r))$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f admet en a une singularité essentielle

Ex. (44) : $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$ et $e^{-1/z}$ admettent respectivement une singularité illusoire, un pôle simple et une singularité essentielle en 0.

Déf. (45) : f est dite méromorphe sur Ω s'il existe une partie $A \subset \Omega$ 101
localement finie telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ et f admette un pôle en tout point de A.
On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Ex. (46) : Soit $P = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 0 \}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ $\forall z \in P$. [BMP]
Alors $\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega)$ et Γ se prolonge en $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ telle que : 82
$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$. DVP3

2) Théorème des résidus

[Tau]

Lemme (47) : Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $a \in \Omega$ un pôle de f et $P(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ la partie principale de f en a. a_{-1} est appelé résidu de f en a, noté $\operatorname{Res}(f,a)$. 102
Si γ est un chemin fermé, $\gamma^* \subset \Omega$ et $a \notin \gamma^*$, alors

$$\int_\gamma P(z)\,dz = 2i\pi \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(a) \times \operatorname{Res}(f,a).$$

Th. (48) : (*Théorème des résidus*)
On suppose Ω convexe, $a_1 \dots a_n \in \Omega$ deux à deux distincts et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1 \dots a_n\})$ telle que a_k soit un pôle de f. Soit γ un chemin fermé, $\gamma^* \subset \Omega$ et 103
$a_k \notin \gamma^*$ $1 \leq k \leq n$.

Alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(a_k) \times \operatorname{Res}(f, a_k)$.

Appli. (49) : Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle intégrable et $z_1 \dots z_n$ ses pôles. On suppose $\operatorname{Im} z_k \neq 0$ $\forall 1 \leq k \leq n$. Alors
si $t < 0$, $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\,dx = 2i\pi \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z) e^{-itz}, z_k)$
$t < 0$ $\quad -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0}$

Références

- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe L3*
- [Ru] Rudin, *Analyse réelle et complexe* (3e éd.)
- [BMP] Beck, *Objectif agrégation* (2e éd.)